

京都大学 1972年 入学試験 文系数学 問題1

問題

2つまたは3つのベクトルの加法について、次の法則が成立する。

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}, (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$$

いま、 n 個のベクトルを $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_n$ とし、その順序を任意にかえたものを $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \dots, \vec{B}_n$ とする。

上の2つの法則だけをつかって、

$$\vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \dots + \vec{A}_n = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_n$$

が成り立つことを数学的帰納法で示せ。なお、なお、たとえば4つのベクトル $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$ について、その和 $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$ は $\{(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}\} + \vec{D}$ を意味するとし、一般の場合も同様とする。

解答

任意の置換はとなりあう二つの互換の積に分解される。

証明終了。

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \text{ を法則 1}$$

$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) \text{ を法則 2 とする。}$$

$n = 2$ の場合

$$\vec{A}_1 + \vec{A}_2 = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

は法則 1 から正しい。

$n = 3$ の場合

$$\vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$$

$\vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3$ の並び変えの種類を尽くすと

以下の6通りとなる。

$$\vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3$$

$$\vec{A}_1 + \vec{A}_3 + \vec{A}_2$$

$$\vec{A}_2 + \vec{A}_1 + \vec{A}_3$$

$$\vec{A}_2 + \vec{A}_3 + \vec{A}_1$$

$$\vec{A}_3 + \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$

$$\vec{A}_3 + \vec{A}_2 + \vec{A}_1$$

$\vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$ は以上のどれかと一致するのでそれぞれが $\vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3$ と等しいことをいえれば十分である。

$$\vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3$$

は自明

$$\begin{aligned}
& \vec{A}_1 + \vec{A}_3 + \vec{A}_2 \\
&= (\vec{A}_1 + \vec{A}_3) + \vec{A}_2 \text{(定義より)} \\
&= \vec{A}_1 + (\vec{A}_3 + \vec{A}_2) \text{(法則 2 より)} \\
&= \vec{A}_1 + (\vec{A}_2 + \vec{A}_3) \text{(法則 1 より)} \\
&= (\vec{A}_1 + \vec{A}_2) + \vec{A}_3 \text{(法則 2 より)} \\
&= \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 \text{(定義より)}
\end{aligned}$$

以下同様に

$$\begin{aligned}
& \vec{A}_2 + \vec{A}_1 + \vec{A}_3 \\
&= (\vec{A}_2 + \vec{A}_1) + \vec{A}_3 \\
&= (\vec{A}_1 + \vec{A}_2) + \vec{A}_3 \\
&= \vec{A}_2 + \vec{A}_1 + \vec{A}_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \vec{A}_2 + \vec{A}_3 + \vec{A}_1 \\
&= (\vec{A}_2 + \vec{A}_3) + \vec{A}_1 \\
&= \vec{A}_2 + (\vec{A}_3 + \vec{A}_1) \\
&= \vec{A}_2 + (\vec{A}_1 + \vec{A}_3) \\
&= (\vec{A}_2 + \vec{A}_1) + \vec{A}_3 \\
&= (\vec{A}_1 + \vec{A}_2) + \vec{A}_3 \\
&= \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \vec{A}_3 + \vec{A}_1 + \vec{A}_2 \\
&= (\vec{A}_3 + \vec{A}_1) + \vec{A}_2 \\
&= (\vec{A}_1 + \vec{A}_3) + \vec{A}_2 \\
&= \vec{A}_1 + (\vec{A}_3 + \vec{A}_2) \\
&= \vec{A}_1 + (\vec{A}_2 + \vec{A}_3) \\
&= (\vec{A}_1 + \vec{A}_2) + \vec{A}_3 \\
&= \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \vec{A}_3 + \vec{A}_2 + \vec{A}_1 \\
&= (\vec{A}_3 + \vec{A}_2) + \vec{A}_1 \\
&= (\vec{A}_2 + \vec{A}_3) + \vec{A}_1 \\
&= \vec{A}_2 + (\vec{A}_3 + \vec{A}_1) \\
&= \vec{A}_2 + (\vec{A}_1 + \vec{A}_3) \\
&= (\vec{A}_2 + \vec{A}_1) + \vec{A}_3 \\
&= (\vec{A}_1 + \vec{A}_2) + \vec{A}_3 \\
&= \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3
\end{aligned}$$

以上より $n = 3$ の場合も成立する。

$n \leq k$ の場合正しいと仮定すると

$$\vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \cdots + \vec{A}_k = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \cdots + \vec{B}_k$$

が成り立つ。

このとき $A_{k+1}^{\vec{}}$ を追加して、任意に並べかえたものを $B_1^{\vec{}}, B_2^{\vec{}}, \dots, B_{k+1}^{\vec{}}$ とする。

そのとき、 $A_{k+1}^{\vec{}}$ が $B_l^{\vec{}}$ ($1 \leq l \leq k+1$) となったとする。

$l = 1$ のときは、

$$\begin{aligned} & B_1^{\vec{}} + B_2^{\vec{}} + \dots + B_l^{\vec{}} + \dots + B_k^{\vec{}} + B_{k+1}^{\vec{}} \\ &= B_1^{\vec{}} + (B_2^{\vec{}} + \dots + B_l^{\vec{}} + \dots + B_k^{\vec{}} + B_{k+1}^{\vec{}}) \\ &= (B_2^{\vec{}} + \dots + B_l^{\vec{}} + \dots + B_k^{\vec{}} + B_{k+1}^{\vec{}}) + B_1^{\vec{}} \end{aligned}$$

$l = 1$ より $B_1^{\vec{}} = A_{k+1}^{\vec{}}$ なので

括弧内は、 $A_{k+1}^{\vec{}}$ 以外の k 個を並べ変えた和となり、

前提より $A_1^{\vec{}} + A_2^{\vec{}} + \dots + A_k^{\vec{}}$ に等しい

したがって、 $n = k + 1$ のとき成り立つ。

$l = k + 1$ の場合は、

$$\begin{aligned} & B_1^{\vec{}} + B_2^{\vec{}} + \dots + B_k^{\vec{}} + B_{k+1}^{\vec{}} \\ &= (B_1^{\vec{}} + B_2^{\vec{}} + \dots + B_k^{\vec{}}) + B_{k+1}^{\vec{}} \\ &= (B_1^{\vec{}} + B_2^{\vec{}} + \dots + B_k^{\vec{}}) + A_{k+1}^{\vec{}} \\ &= (A_1^{\vec{}} + A_2^{\vec{}} + \dots + A_k^{\vec{}}) + A_{k+1}^{\vec{}} \\ &= A_1^{\vec{}} + A_2^{\vec{}} + \dots + A_k^{\vec{}} + A_{k+1}^{\vec{}} \end{aligned}$$

となり、成立する。

$1 < l < k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} & B_1^{\vec{}} + B_2^{\vec{}} + \dots + B_l^{\vec{}} + \dots + B_k^{\vec{}} + B_{k+1}^{\vec{}} \\ &= A_1^{\vec{}} + A_2^{\vec{}} + \dots + A_k^{\vec{}} + A_{k+1}^{\vec{}} \end{aligned}$$

$l = k + 1$

$$\begin{aligned} & B_1^{\vec{}} + B_2^{\vec{}} + \dots + B_l^{\vec{}} + \dots + B_k^{\vec{}} + B_{k+1}^{\vec{}} \\ &= (((((B_1^{\vec{}} + B_2^{\vec{}}) + \dots) + B_l^{\vec{}}) + \dots) + B_k^{\vec{}}) + B_{k+1}^{\vec{}} \text{ (定義より)} \\ &= (((((B_1^{\vec{}} + B_2^{\vec{}}) + \dots) + B_l^{\vec{}}) + \dots) + (B_k^{\vec{}} + B_{k+1}^{\vec{}})) \text{ (法則 2 より)} \\ &= (((B_1^{\vec{}} + B_2^{\vec{}}) + \dots) + B_l^{\vec{}}) + (\dots + (B_k^{\vec{}} + B_{k+1}^{\vec{}})) \text{ (くりかえし)} \\ &= ((B_1^{\vec{}} + B_2^{\vec{}}) + \dots) + B_l^{\vec{}} + (\dots + (B_k^{\vec{}} + B_{k+1}^{\vec{}})) \text{ 定義より} \end{aligned}$$

この式を以下の様に三つの部分に分けて考える。

$$(B_1^{\vec{}} + B_2^{\vec{}} + \dots) + B_l^{\vec{}} + (\dots + B_{k+1}^{\vec{}})$$

各括弧の中をそれぞれ

$$B_1^{\vec{}} + B_2^{\vec{}} + \dots + B_{l-1}^{\vec{}} = \vec{L}$$

$$B_{l+1}^{\vec{}} + \dots + B_{k+1}^{\vec{}} = \vec{R}$$

とおくと

$n = 3$ のとき成り立つので

$$\vec{L} + B_l^{\vec{}} + \vec{R} = \vec{L} + \vec{R} + B_l^{\vec{}}$$

$\vec{L} + \vec{R}$ は $A_1^{\vec{}}$ から $A_k^{\vec{}}$ の k 個のベクトルを入れ換えた和なので

前提より $A_1^{\vec{}} + A_2^{\vec{}} + \dots + A_k^{\vec{}}$ に等しい。

したがって、 $(\vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \cdots) + \vec{B}_l + (\cdots + \vec{B}_{k+1}) = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \cdots + \vec{A}_k + \vec{A}_{k+1}$

よって、 $n = k + 1$ のときも成り立つ。

以上より、数学的帰納法により、任意の n について、成り立つ。