京都大学　1973 年　入学試験　理系数学　問題 5

問題

　n は自然数とし

$$f(x) = 1 + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

とする．
このとき，$-1 \leqq x \leqq 1$ において

$$1 \leqq f(x) < 2$$

であることを証明せよ．

解答

$f(x)$ を 2 階微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} \\ f''(x) &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} \\ (1-x)f''(x) &= 1 - x^n \end{aligned}$$

$-1 \leqq x \leqq 1$ より
$(1-x) \geqq 0$,$(1-x) \geqq 0$
よって、$f''(x) \geqq 0$
したがって、$f'(x)$ は単調増加
$f'(0) = 0$ より $f'(x)$ は $x < 0$ で $f'(x) \leqq 0$、$x > 0$ で $f'(x) \geqq 0$
したがって、
$f(x)$ は $x < 0$ で単調減少,$x > 0$ で単調増加
以上より $f(x)$ は、$x = 0$ で最小値をとり、$x = 1$ または $x = -1$ で最大値をとる。
$f(0) = 1$ より、$f(x) \geqq 1$

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ f(-1) &= 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{-1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} \end{aligned}$$

$f(1)$ の各項は正、$f(-1)$ の一部の項は負なので、$f(1) > f(-1)$
よって、最大値は、$f(1)$

$$\begin{aligned}
f(1) &= 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\
&= 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\
&= 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \\
&= 2 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

$n+1>0$ より、$f(1)<2$
以上より、
$1 \leqq f(x) < 2$