京都大学　1978 年　入学試験　理系数学　問題 3

問題

放物線 $y = 4 - x^2$ と直線 $y = 3x$ との 2 交点を A，B とする．点 P は放物線の弧の上を A から B まで動くものとし，△PAB の面積が最大となるときの P の座標を (p, q) とする．

1. p を求めよ．
2. 線分 AB に平行な直線が放物線と 2 点 C，D で交わるとき，線分 CD は直線 $x = p$ によって二等分されることを示せ．
3. 放物線と線分 AB によって囲まれる図形は，直線 $x = p$ によって，互いに面積の等しい二つの部分に分けられることを示せ．

解答

曲線 $y = 4 - 3x - x^2$ を C とする。
これは $y = 4 - x^2$ と $y = 3x$ の y の差分をとったものとなる。
$x = p$ の時の $y = 3x$ 上の点 $(p, 3p)$ を Q とする。
$x = p$ の時の $y = 0$ 上の点 $(p, 0)$ を Q$'$ とする。
また $x = p$ の時の $y = 4 - 3x - x^2$ 上の点を P$'$
A の x 座標を x_a とすると C 上の x_a の時の y の値は 0、この点を A$'$
同様に B の x 座標を x_b とすると x_b の時の C 上の y の値も 0、この点を B$'$
とする。
このとき三角形 APQ と三角形 A$'$P$'$Q$'$ を考えると
この三角形は底辺を PQ と考えたとき $\overline{\mathrm{PQ}} = (4 - p^2) - (3p) = 4 - 3p - p^2 = \overline{\mathrm{P'Q'}}$ となり
また高さは $p - x_a$ となり等しいので面積は等しい
同様に三角形 BPQ と三角形 B$'$P$'$Q$'$ の面積も等しい。
したがって三角形 APB と三角形 A$'$P$'$B$'$ の面積は等しい
よって三角形 APB の面積が最大となるときは三角形 A$'$P$'$B$'$ の面積が最大となるとき
1.
三角形 A$'$P$'$B$'$ の面積は P$'$ の高さと $x_b - x_a$ をかけたものに比例する。
$x_b - x_a$ は一定なので P$'$ の高さが最大のときに最大となる。
P$'$ の高さは $4 - 3p - p^2$ なので
$f(x) = 4 - 3p - p^2$ とすると
$f(x)$ は上に凸な二次式なので
$f'(x) = -2p - 3$ より
$x = -\dfrac{3}{2}$ のとき最大となる。したがって

$$p = -\frac{3}{2}$$

2.
線分 AB と平行な直線と放物線の交点 CD は上と同様の変換を行うことによって x 軸に平行な線分と C の交点とおなじ x 座標を持つ。
また x 軸に平行な線分なので y 座標は等しい。
その y 座標を y_1 とし
その x 座標を x_1,x_2 とすると

$y_1 = 4 - 3x_1 - {x_1}^2 = 4 - 3x_2 - {x_2}^2$

$0 = 4 - 3x_2 - {x_2}^2 - 4 + 3x_1 + {x_1}^2 = 3(x_1 - x_2) - {x_1}^2 - {x_2}^2 = (x_1 - x_2)(3 - x_1 - x_2)$

$x_1 \neq x_2$ が前提なので

$x_1 + x_2 = 3$

$\dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{3}{2} = p$

よって x_1 と x_2 の中点は p である。

したがって $x_1 - p = p - x_2$

このとき C は $(x_1, 3x_1)$、D は $(x_2, 3x_2)$,$y = 3x$ と $x = p$ の交点は $(p, 3p)$ なので

$(p, 3p)$ と C の距離は $\sqrt{(x_1 - p)^2 + (3(x_1 - p))^2}$

$(p, 3p)$ と D の距離は $\sqrt{(x_2 - p)^2 + (3(x_2 - p))^2}$

$x_1 - p = p - x_2$ より

$(x_2 - p)^2 = (x_1 - p)^2$

となり二つの距離は等しい

したがって、$x = p$ の直線で 2 等分される。

3.

$y = 4 - x^2$ と $y = 3x$ で囲まれる部分の面積を $x_a < x < p$ の部分を S_a、$p < x < x_b$ の部分を S_b とすると

$S_a = \displaystyle\int_{x_a}^{p} 4 - x^2\ dx - \int_{x_a}^{x_b} 3x\ dx = \int_{x_a}^{p} 4 - 3x - x^2\ dx$ $S_b = \displaystyle\int_{p}^{x_b} 4 - x^2\ dx - \int_{x_a}^{x_b} 3x\ dx = \int_{p}^{x_b} 4 - 3x - x^2\ dx$

つまりそれぞれの区間で曲線 C と x 軸が囲む部分の面積に等しい

曲線 C は $x = p$ を対称軸とした 2 次式なので $x = p$ の左右の形は全く等しい

したがって p からの距離がおなじ範囲で囲む面積は等しい。

上より $|x_a - p| = |x_b - p|$ なのでこの部分の面積は等しい。

よって放物線と線分 AB によって囲まれる図形は，直線 $x = p$ によって，互いに面積の等しい二つの部分に分けられる。

証明終了