京都大学　1979 年　入学試験　文系数学　問題 5

問題

$\dfrac{2^n}{n} > n$ をみたす自然数 n の範囲を求めよ.

解答

n は自然数なので $n > 0$ としてよい
よって $2^n - n^2 > 0$ を満たす n の範囲としてもよい。
$f(x) = 2^x - x^2$ とすると $x \geqq 1$ の範囲で連続かつ微分可能な関数である。
$f'(x) = \log 2\, 2^x - 2x$
$f''(x) = \log^2 2\, 2^x - 2$
$n = 1, 2, 3, 4, 5$ について計算してみると
$f(1) = 1$
$f(2) = 0$
$f(3) = -1$
$f(4) = 0$
$f(5) = 7$
ここで $f''(x)$ を考えると
$f''(4) = \log^2 2\ 16 - 2 =$
$\log 2 = 0.69...$ なので
$\log^2 2 = 0.480...$
したがって $f''(4) = 5.68... > 0$
2^x は単調増加なので $f''(x)$ は $x > 4$ において正
したがって $f'(x)$ は $x > 4$ において単調増加
$f'(4) = 3.09... > 0$ より
$f'(x)$ は $x > 4$ において正
したがって $f(x)$ は $x > 4$ において単調増加
よって $x \geqq 5$ において $f(x) \geqq f(5) > 0$
以上より

$$n = 1 \text{ または } n > 4$$

証明終了