京都大学　1981 年　入学試験　文系数学　問題 1

問題

座標平面上に，原点と異なる 3 点 A，B，C を考える．A は x 軸上にあり，B は y 軸上にあるものとする．O を原点とするとき，1 次変換 f が $f(\vec{\mathrm{OA}})=\vec{\mathrm{OB}}$，$f(\vec{\mathrm{OB}})=\vec{\mathrm{OC}}$，$f(\vec{\mathrm{OC}})=\vec{\mathrm{OA}}$ をみたすものとする．このとき，次の (1)，(2) が成り立つことを示せ.

1. $\vec{\mathrm{OA}}+\vec{\mathrm{OB}}+\vec{\mathrm{OC}}=\vec{0}$
2. $|\vec{\mathrm{OA}}|=|\vec{\mathrm{OB}}|$ なるとき，平面上の点 P で，$\vec{\mathrm{OP}}$ と $f(\vec{\mathrm{OP}})$ とが直交するならば，点 P は x 軸上にある．ただし，|　| はベクトルの大きさを表わす.

解答

$A=(x,0),B=(0,y)$ とおき

f を表す行列を $T=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ とすると

$f(\overrightarrow{\mathrm{OA}})=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax \\ bx \end{pmatrix}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

より $ax=0,y=bx$

$x\neq 0$ より $a=0$

$f(\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ bx \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} bcx \\ bdx \end{pmatrix}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$f(\overrightarrow{\mathrm{OC}})=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} bcx \\ bdx \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} abcx+bcdx \\ b^2cx+bd^2x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}=\vec{OA}$

より $bcdx=x$

$x\neq 0$ より $bcd=1$

$b^2cx+bd^2x=0$

$bx(bc+d^2)=0$

$bcd=1$ より $b,c,d\neq 0$

よって $bc+d^2=0$

$bc=\dfrac{1}{d}$ より

$\dfrac{1}{d}+d^2=0$

$d^3+1=0$

d は実数なので $d=-1$

よって $bc=-1$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ bx \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} bcx \\ bdx \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+bcx \\ bx+bdx \end{pmatrix}$

$bc=-1$ より $x+bcx=x-x=0$

$d=-1$ より $bx+bdx=bx-bx=0$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{0}$

2.

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|x|$

$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|y|=|bx|$

よって $|x| = |bx|$ となり $b = \pm 1$

したがって $c = \mp 1$

よって $T = \begin{pmatrix} 0 & \mp 1 \\ \pm 1 & -1 \end{pmatrix}$

$P = (x, y)$ とすると

$f(\overrightarrow{\mathrm{OP}}) = (\mp y, \pm x - y)$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $f(\overrightarrow{\mathrm{OP}})$ が直交するということは

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $f(\overrightarrow{\mathrm{OP}})$ の内積が 0

内積は

$\mp xy + \pm xy - y^2$ なので $y^2 = 0$

つまり $y = 0$ なので P は x 軸上にある。

証明終了