京都大学　1981年　入学試験　文系数学　問題2

問題

p を有理数とし，次の関係をもつ x_n，y_n を座標にもつ平面上の点 P_n（$n=1$，2，$\cdots$）を考える；

$$x_{n+1}=x_n+p(y_{n+1}+y_n),\quad y_{n+1}=y_n-p(x_{n+1}+x_n)$$

いま，x_1，y_1 がともに有理数で，かつ P_1 は原点でないとする．このとき，すべての x_n，y_n は有理数であり，点 P_n は原点を中心とする定円上にあることを示せ．

解答

x_1、y_1 は有理数である。

x_k,y_k がともに有理数であるとすると

$x_{k+1}=x_k+p(y_{k+1}+y_k)$ $y_{k+1}=y_k-p(x_{k+1}+x_k)$ より

$x_{k+1}-py_{k+1}=x_k+py_k$ $px_{k+1}+y_{k+1}=y_k-px_k$ となり

有理数の積と和は有理数なので

$x_{k+1}-py_{k+1}$ と $y_{k+1}+px_{k+1}$ は有理数

$x_{k+1}-py_{k+1}=q$ と $px_{k+1}+y_{k+1}=r(q,r$ は有理数$)$ とすると

$q+pr=x_{k+1}-py_{k+1}+p^2x_{k+1}+py_{k+1}=x_{k+1}+p^2x_{k+1}=(1+p^2)x_{k+1}$ となり

$1+p^2>0$ より

$x_{k+1}=\dfrac{q+pr}{1+p^2}$

となって、x_{k+1} は有理数

同様に $r-pq=(1+p^2)y_{k+1}$ となり y_{k+1} も有理数。

以上より数学的帰納法により x_n,y_n は有理数。

$q=x_k+py_k$,$r=y_k-px_k$ とすると

上述の通り

$x_{k+1}=\dfrac{q+pr}{1+p^2}$

$y_{k+1}=\dfrac{r-pq}{1+p^2}$

となり

${x_{n+1}}^2+{y_{n+1}}^2$ を計算すると

$$
\begin{aligned}
{x_{n+1}}^2 + {y_{n+1}}^2 &= \left(\frac{q+pr}{1+p^2}\right)^2 + \left(\frac{r-pq}{1+p^2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{(1+p^2)^2}((q+pr)^2 + (r-pq)^2) \\
&= \frac{1}{(1+p^2)^2}(q^2 + p^2r^2 + r^2 + p^2q^2) \\
&= \frac{1}{(1+p^2)^2}((1+p^2)(q^2+r^2)) \\
&= \frac{1}{1+p^2}(q^2+r^2) \\
&= \frac{1}{1+p^2}((x_n + py_n)^2 + (y_n - px_n)^2) \\
&= \frac{1}{1+p^2}({x_n}^2 + p^2{y_n}^2 + {y_n}^2 + p{x_n}^2) \\
&= \frac{1}{1+p^2}(1+p^2)({x_n}^2 + {y_n}^2) \\
&= {x_n}^2 + {y_n}^2
\end{aligned}
$$

よって数学的帰納法より $|\mathrm{OP}_n| = |\mathrm{OP}_1|$
したがって P_n は定円上にある。

証明終了