京都大学　1982 年　入学試験　理系数学　問題 2

問題

次の性質をもつ実数 a は，どのような範囲にあるか．

二次方程式 $t^2-2at+3a-2=0$ は実根 α，β をもち，$\alpha \geqq \beta$ とするとき，不等式 $y \leqq x$，$y \geqq -x$，$ay \geqq 3(x-\beta)$ で定まる領域は，三角形になる．

解答

$t^2-2at+3a-2=0$ を解くと
$t=a\pm\sqrt{a^2-3a+2}$ となる。
これが二つの実根を持つためには $a^2-3a+2 \geqq 0$ が成立しなければならない。
$a^2-3a+2=(a-1)(a-2)$ なので
$a \leqq 1$ または $a \geqq 2$ の範囲で二つの実根を持つ。
このとき $a^2-3a+2>0$ なので実根の小さい方は $a-\sqrt{a^2-3a+2}$ となる。
したがって $y \geqq -x$ と $y \leqq x$ と $ay \geqq 3(x-\beta)$ が三角形をなすためには
$ay=3(x-\beta)$ が $y=x$,$y=-x$ のそれぞれと $x>0$ の範囲で交点を持つ必要がある。
したがって x の方程式 $ax=3(x-\beta)$,$-ax=3(x-\beta)$ が解をもってそれが正である必要がある。
$a=3,-3$ のときはこの方程式は解を持たないので、$a \neq 3,-3$
つまり
$ax=3(x-\beta)$ の解 $x=\dfrac{-3\beta}{a-3}$ が正
$-ax=3(x-\beta)$ の解 $x=\dfrac{3\beta}{a+3}$ が正
よって

$$\frac{-3a+3\sqrt{(a-1)(a-2)}}{a-3}>0$$
$$\frac{3a-3\sqrt{(a-1)(a-2)}}{a+3}>0$$

$a<0$ では
$-3a>0$ より $\dfrac{-3a+3\sqrt{(a-1)(a-2)}}{a-3}<0$
$0<a \leqq 1$ では
$a+\sqrt{(a-1)(a-2)}>0$ なので $a-\sqrt{(a-1)(a-2)}$ の正負は $(a-\sqrt{(a-1)(a-2)})(a+\sqrt{(a-1)(a-2)})=a^2-a^2+3a-2=3a-2$ の正負と一致する。
よって
$a<\dfrac{2}{3}$ のときは負、$a>\dfrac{2}{3}$ のときは正
よって $0<a<\dfrac{2}{3}$ のとき
$\dfrac{-3a+3\sqrt{(a-1)(a-2)}}{a-3}>0$
しかしそのとき $3a-3\sqrt{(a-1)(a-2)}<0$ なので
$\dfrac{3a-3\sqrt{(a-1)(a-2)}}{a+3}<0$ となり成立しない。
$2 \leqq a<3$ では
$a-\sqrt{(a-1)(a-2)}$ の正負は $(a-\sqrt{(a-1)(a-2)})(a+\sqrt{(a-1)(a-2)})=a^2-a^2+3a-2=3a-2$ の正負と一致する
$3a-2>0$ より $\dfrac{-3a+3\sqrt{(a-1)(a-2)}}{a-3}>0$

$$\frac{3a-3\sqrt{(a-1)(a-2)}}{a+3} > 0$$

となり成立する。$a > 3$ においては $-3a+3\sqrt{(a-1)(a-2)} < 0$ より $\dfrac{-3a+3\sqrt{(a-1)(a-2)}}{a-3} < 0$
となり成立しない。
以上より
条件が成立するのは

$$2 \leqq a < 3$$

証明終了