京都大学　1995 年　入学試験　後期理系数学　問題 3

## 問題

$a$，$b$，$c$ は実数で $a \geqq 0$，$b \geqq 0$ とする．

$$p(x) = ax^2 + bx + c,\ \ q(x) = cx^2 + bx + a$$

とおく．$-1 \leqq x \leqq 1$ をみたすすべての $x$ に対して $|p(x)| \leqq 1$ が成り立つとき，$-1 \leqq x \leqq 1$ をみたすすべての $x$ に対して $|q(x)| \leqq 2$ が成り立つことを示せ．

## 解答

$a, b, c$ それぞれが 0 である場合を分けて考える。
可能な組合せは

$$a = 0, b = 0, c = 0 \tag{1}$$
$$a \neq 0, b = 0, c = 0 \tag{2}$$
$$a = 0, b \neq 0, c = 0 \tag{3}$$
$$a = 0, b = 0, c \neq 0 \tag{4}$$
$$a \neq 0, b \neq 0, c = 0 \tag{5}$$
$$a \neq 0, b = 0, c \neq 0 \tag{6}$$
$$a = 0, b \neq 0, c \neq 0 \tag{7}$$
$$a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0 \tag{8}$$

の 8 通り
(1) の場合
$p(x) = 0, q(x) = 0$ なので
$-1 \leqq x \leqq 1$ をみたすすべての $x$ に対して $|q(x)| \leqq 2$ が成り立つ

(2) の場合
$p(x) = ax^2, q(x) = a$ となる
$p'(x) = 2ax$ となり $a > 0$ より ($a \neq 0$ は (2) の仮定)

$$\begin{cases} p'(x) < 0 \ (x < 0) \\ p'(x) = 0 \ (x = 0) \\ p'(x) > 0 \ (x > 0) \end{cases} \tag{9}$$

$p(x)$ は $x < 0$ で単調減少、$x > 0$ で単調増加
よって $x = 0$ で最小値 0 をとり
$x = 1, -1$ の両端のどちらか大きい方が最大値となる。
しかし、$p(1) = a(1)^2 = a(-1)^2 = p(-1)$ なので
最大値は $p(1) = a$
したがって $p(x)$ は $0 \leqq p(x) \leqq a$
条件より $|p(x)| \leqq 1$ なので $0 < a \leqq 1$
そのとき $q(x) = a$ なので
$0 < q(x) = a \leqq 1$ となり
$-1 \leqq x \leqq 1$ をみたすすべての $x$ に対して $|q(x)| \leqq 2$ が成り立つ

(3) の場合

$p(x)=bx, q(x)=bx$ となり $p(x)=q(x)$

$|p(x)| \leqq 1$ なので $-1 \leqq x \leqq 1$ をみたすすべての $x$ に対して $|q(x)| \leqq 2$ が成り立つ

(4) の場合

$p(x)=c, q(x)=cx^2$ となり $|p(x)| \leqq 1$ より $|c| \leqq 1$ $q'(x)=2cx$ となり

$c>0$ の場合は

$$\begin{cases} q'(x)<0 \ (x<0) \\ q'(x)=0 \ (x=0) \\ q'(x)>0 \ (x>0) \end{cases} \tag{10}$$

$q(x)$ は $x<0$ で単調減少、$x>0$ で単調増加

よって $x=0$ で最小値 0 をとり

$x=1,-1$ の両端のどちらか大きい方が最大値となる。

しかし、$q(1)=c(1)^2=c(-1)^2=q(-1)$ なので

最大値は $q(1)=c$

したがって $q(x)$ は $0 \leqq q(x) \leqq c$

$|c| \leqq 1$ より $0 \leqq q(x) \leqq 1$

したがってなりたつ

$c<0$ の場合は

$$\begin{cases} q'(x)>0 \ (x<0) \\ q'(x)=0 \ (x=0) \\ q'(x)<0 \ (x>0) \end{cases} \tag{11}$$

$q(x)$ は $x<0$ で単調増加、$x>0$ で単調減少

よって $x=0$ で最大値 0 をとり

$x=1,-1$ の両端のどちらか小さい方が最小値となる。

よって同様に $q(x)$ は $0 \geqq q(x) \geqq c$

$|c| \leqq 1$ より $0 \geqq q(x) \geqq 1$

したがってなりたつ

(5) の場合

$$a \neq 0, b \neq 0, c=0$$

$p(x)=ax^2+bx, q(x)=bx+a$ となる。

$p'(x)=2ax+b$ より $(a>0, b>0$ より$)$

$$\begin{cases} p'(x)>0 \ (x<-b/2a) \\ p'(x)=0 \ (x=-b/2a) \\ p'(x)<0 \ (x>-b/2a) \end{cases} \tag{12}$$

$-b/2a<-1$ の場合

$p(x)$ は区間 $[-1 \leqq x \leqq 1]$ の範囲で正

つまり単調増加なので最小値は $p(-1)=a-b$ 最大値は $p(1)=a+b$

このとき $q(x)$ は $bx+a$ で $b>0$ な 1 次関数であるから単調増加

したがって最小値は $q(-1)=-b+a=p(-1)$, 最大値は、$q(1)=a+b=p(1)$ $|p(x)| \leqq 1$ より $|q(x)| \leqq 1$

したがってなりたつ

$-1 \leqq -b/2a \leqq 1$ の場合
$a > 0$ より
$p(x)$ は x=-b/2a の点で最小値をとり
$x = 1, -1$ のどちらか大きい方が最小値となる。

$$
\begin{aligned}
p\left(\frac{-b}{2a}\right) &= a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) \\
&= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} \\
&= -\frac{b^2}{4a}
\end{aligned}
$$

また

$$p(1) = a + b, p(-1) = a - b$$

$a > 0, b > 0$ より $p(1) > p(-1)$
よって、

$$-1 \leqq -\frac{b^2}{4a} \leqq p(x) \leqq a + b \leqq 1$$

前と同様に $a - b \leqq q(x) \leqq a + b \leqq 1$ だから $-1 \leqq -\frac{b^2}{4a}$ から

$$\frac{b^2}{4a} < 1$$

$a > 0$ より

$$b^2 < 4a$$

$b > 0$ より

$$b < 2\sqrt{a}$$

$$a - b < a - 2\sqrt{a}$$

(6) の場合

$$a \neq 0, b = 0, c \neq 0$$

$p(x) = ax^2 + c, p(x) = cx^2 + a$
$p'(x) = 2ax$
$(a > 0, b > 0$ より$)$

$$
\begin{cases}
p'(x) > 0 \ (x < -b/2a) \\
p'(x) = 0 \ (x = -b/2a) \\
p'(x) < 0 \ (x > -b/2a)
\end{cases}
\tag{13}
$$