京都大学　2000年　入学試験　後期理系数学　問題2

問題

1.$x \geqq 0$ のとき，不等式 $e^x \geqq 1+\dfrac{1}{2}x^2$ が成立することを示せ.

2. 自然数 n に対して関数 $f_n(x)=n^2(x-1)e^{-nx}$ の $x \geqq 0$ における最大値を M_n とする．このとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ を求めよ.

解答

1.
$f(x)=e^x-\left(1+\dfrac{1}{2}x^2\right)$ とする $x=0$ のとき

$$f(0)=1-1=0$$

$f(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x)&=e^x-x \\ f'(0)&=1-0=1 \end{aligned}$$

$f''(x)=e^x-1$ となり
$x \geqq 0$ において $e^x \geqq 1$ だから

$$f''(x) \geqq 0$$

したがって $f'(x)$ は単調増加で $f'(0)=1$ より $f'(x) \geqq 1$
$f(x)$ も単調増加で $f(0)=0$ より $f(x) \geqq 0$

$$\begin{aligned} f(x) &\geqq 0 \\ e^x-\left(1+\frac{1}{2}x^2\right) &\geqq 0 \\ e^x &\geqq 1+\frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

よって不等式は成立する。

2.

$$\begin{aligned} f_n(x)&=n^2(x-1)e^{-nx} \\ &=n^2xe^{-nx}-n^2e^{-nx} \end{aligned}$$

$f_n(x)$ を微分して

$$\begin{aligned} f_n'(x)&=n^2e^{-nx}-n^3xe^{-nx}+n^3e^{-nx} \\ &=n^2(1-nx+n)e^{-nx} \end{aligned}$$

したがって n^2e^{-nx} は常に正なので $f_n'(x)$ の正負は $(1-nx+n)$ の正負と一致する。
$g(x)=(1-nx+n)$ とおく
$x=0$ の時
$g(0)=1-n0+n=1+n>0$
$g'(x)=-n$ より
$g'(x)$ は単調減少
$g(x)=0$ を解くと
$x=\frac{n+1}{n}$
よって

$$g(x)=\begin{cases} >0 & \left(0\leqq x<\frac{n+1}{n}\right) \\ =0 & \left(x=\frac{n+1}{n}\right) \\ <0 & \left(x>\frac{n+1}{n}\right) \end{cases}$$

したがって

$$f'(x)=\begin{cases} >0 & \left(0\leqq x<\frac{n+1}{n}\right) \\ =0 & \left(x=\frac{n+1}{n}\right) \\ <0 & \left(x>\frac{n+1}{n}\right) \end{cases}$$

よって $f_n(x)$ は

$$x=\frac{n+1}{n}$$

において最大値をとる。
そのときの $f_n(x)$ の値は

$$\begin{aligned} M_n &= f_n\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= n^2\left(\frac{n+1}{n}-1\right)e^{-n\frac{n+1}{n}} \\ &= ne^{-(n+1)} \end{aligned}$$

$S=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ とおく

$$\begin{aligned} S=\sum_{n=1}^{\infty}M_n &= \sum_{n=1}^{\infty}ne^{-(n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{n+1}} \\ &= \frac{1}{e^2}+\frac{2}{e^3}+\frac{3}{e^4}+\cdots+\frac{k}{e^{k+1}}+\cdots \end{aligned}$$

$S-\frac{1}{e}S$ を計算すると

$$\begin{aligned} S-\frac{1}{e}S = \frac{1}{e^2}&+\frac{2}{e^3}+\frac{3}{e^4}+\cdots+\frac{k}{e^{k+1}}+\cdots \\ &-\frac{2}{e^4}-\frac{3}{e^4}-\cdots-\frac{k-1}{e^{k+1}}-\cdots \\ =\frac{1}{e^2}&+\frac{1}{e^3}+\frac{1}{e^4}+\cdots+\frac{1}{e^{k+1}}+\cdots \\ = &\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{n+1}} \end{aligned}$$

$T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{n+1}}$ とおく

公比 $x < 1$ のとき等比数列の和は初項 a_1 として

$\sum_{n=1}^{k} a_1 x^{n-1} = \frac{a_1 - a_1 x^k}{1-x}$

となり

$\lim_{k \to \infty} \frac{a_1 - a_1 x^k}{1-x} = \frac{a_1}{1-x}$

となって収束するので

$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 x^{n-1} = \frac{a_1}{1-x}$

そこで

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{e^2} \frac{1}{1-1/e} \\
&= \frac{1}{e^2} \frac{e}{e-1} \\
&= \frac{1}{e(e-1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S &= T/(1-\frac{1}{e}) \\
&= \left(\frac{1}{e(e-1)}\right) / \left(\frac{e-1}{e}\right) \\
&= \left(\frac{1}{e(e-1)}\right) \left(\frac{e}{e-1}\right) \\
&= \frac{1}{(e-1)^2}
\end{aligned}
$$

以上より

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \frac{1}{(e-1)^2}$$