京都大学　2007年　入学試験　文系数学　問題1

問題

問1．$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき，$A^6+2A^4+2A^3+2A^2+2A+3E$ を求めよ．

問2．四角形 ABCD を底面とする四角錐 OABCD を考える．点 P は時刻 0 では頂点 O にあり，1 秒ごとに次の規則に従ってこの四角錐の 5 つの頂点のいずれかに移動する．

規則：点 P のあった頂点と 1 つの辺によって結ばれる頂点の 1 つに，等しい確率で移動する．
このとき，n 秒後に点 P が頂点 O にある確率を求めよ．

解答

問1．
ケーリー・ハミルトンの定理 $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=0$ より
$(a+d)=1$,$(ad-bc)=2$ なので
$A^2=A-2E$
$V=A^6+2A^4+2A^3+2A^2+2A+3E$ すると
$A^3=A(A^2)=A(A-2E)=A^2-2A=A-2E-2A=-A-2E$
$A^4=A(A^3)=A(-A-2E)=-A^2-2A=-A+2E-2A=-3A+2E$
$A^5=A(A^4)=A(-3A+2E)=-3A^2+2A=-3(A-2E)+2A=-A+6E$
$A^6=A(A^5)=A(-A+6E)=-A^2+6A=-A+2E+6A=5A+2E$
以上より

$$\begin{aligned} V &= 5A+2E+2(-3A+2E)+2(-A-2E)+2(A-2E)+2A+3E \\ &= 5A+2E-6A+4E-2A-4E+2A-4E+2A+3E \\ &= 5A-6A-2A+2A+2A+2E+4E-4E-4E+3E \\ &= A+E \end{aligned}$$

よって、$V=A+E$
$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ より、
$V=A+E=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
以上より $A^6+2A^4+2A^3+2A^2+2A+3E=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

問2．
n 秒後に点 O にある確率を P_n とする。
定義より $P_0=1$
また、1 秒後は直前の時刻 0 に点 O にあったので必ず移動するという条件から、1 秒後の確率 $P_1=0$
ある時刻 n に点 O にいたとき時刻 $n+1$ に点 O にいる確率は、0
点 O は他の頂点と必ず辺で結ばれているおり、O 以外の頂点は底面の隣り合う点 2 個と点 O の合計 3 個の点と辺で結ばれているため、ある時刻 n に点 O 以外の点にあったとき、時刻 $n+1$ に点 O にいる確率は、移動

する先の点が3個であり、それぞれ同確率で移動するので $\dfrac{1}{3}$
時刻 n に点 O にいる確率を P_n としているので、時刻 n に点 O にいない確率は $1 - P_n$

以上より、$P_{n+1} = 0P_n + \dfrac{1}{3}(1 - P_n) = \dfrac{1}{3}(1 - P_n)$
従って、$P_{n+1} - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{3}(P_n - \dfrac{1}{4})$
$S_n = P_n - \dfrac{1}{4}$ とすると
$S_0 = P_0 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$
$S_1 = P_1 - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{4}$
S_n は公比 $-\dfrac{1}{3}$ の等比数列なので
$S_n = -\dfrac{1}{4}(-\dfrac{1}{3})^{n-1}$
よって $P_n = S_n + \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{4}(-\dfrac{1}{3})^{n-1} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1 - (-\frac{1}{3})^{n-1}}{4}$
以上より、時刻 n に点 O にある確率は $\dfrac{1 - (-\frac{1}{3})^{n-1}}{4}$

証明終了