京都大学　1970年　入学試験　理系数学　問題4

問題

半径 r の円Oの定弦をABとし，その長さを $2l$ とする．
円Oの周上の動点Pについて，積 $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}$ が
$2r(r-\sqrt{r^2-l^2})$ となるのは，Pがどの位置にあるときか．

解答

以下のように直交座標系を設定する。
(1) 円Oの中心を原点
(2)ABの中点を通る直線を x 軸
(3)ABの中点は x 軸の正の部分または原点にある
このように設定しても一般性は失わない

点A,Bは $\mathrm{A}=(\sqrt{r^2-l^2},l),\mathrm{B}=(\sqrt{r^2-l^2},-l)$ と表せる。
(ABは $x>0$ の領域にあるので、x 座標は正または0
また、A,Bは対等なので、Aの y 座標を正と仮定しても一般性を失わない)
$s=\sqrt{r^2-l^2}$ とおく
点Pの座標を (x,y) とする。
定義より (x,y) は $x^2+y^2=r^2$ の式を満たす。

$p=\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}$ $q=2r(r-\sqrt{r^2-l^2})$ とする。
$p=\sqrt{(x-s)^2+(y-l)^2}\sqrt{(x-s)^2+(y+l)^2}$
$p^2=((x-s)^2+(y-l)^2)((x-s)^2+(y+l)^2)$
展開して

$$\begin{aligned}
p^2&=((x-s)^2+(y-l)^2)((x-s)^2+(y+l)^2)\\
&=(x^2-2sx+s^2+y^2-2ly+l^2)(x^2-2sx+s^2+y^2+2ly+l^2)\\
&=(x^2+y^2-2sx+s^2-2ly+l^2)(x^2+y^2-2sx+s^2+2ly+l^2)\\
&=(r^2-2sx+s^2-2ly+l^2)(r^2-2sx+s^2+2ly+l^2)
\end{aligned}$$

$s^2=r^2-l^2$ なので

$$\begin{aligned}
p^2&=(r^2-2sx+r^2-l^2-2ly+l^2)(r^2-2sx+r^2-l^2+2ly+l^2)\\
&=(2r^2-2sx-2ly)(2r^2-2sx+2ly)\\
&=4(r^2-sx-ly)(r^2-sx+ly)\\
&=4((r^2-sx)^2-l^2y^2)\\
&=4((r^2-sx)^2-l^2(r^2-x^2))\\
&=4((r^2-sx)^2-l^2r^2+l^2x^2))\\
&=4r^4-8r^2sx+4s^2x^2-4l^2r^2+4l^2x^2
\end{aligned}$$

また q^2 を計算すると

$$\begin{aligned}
q^2&=(2r(r-s))^2\\
&=4r^2(r^2-2rs+s^2)\\
&=8r^4-8r^3s-4r^2l^2
\end{aligned}$$

いま $p=q$ となる場合を考えるが定義より $p>0, q>0$ は明らかなので $p^2=q^2$ が成立すれば、$p=q$ がいえる。

$$\begin{aligned} p^2-q^2 &= 4r^4-8r^2sx+4s^2x^2-4l^2r^2+4l^2x^2-(8r^4-8r^3s-4r^2l^2) \\ &= -4r^2(r^2)+4r^2(x^2)-4r^2(2xs)+4r^2(2rs) \\ &= 4r^2(x^2-2xs+2rs-r^2) \end{aligned}$$

$r>0$ より
$x^2-2xs+2rs-r^2=0$ の時のみ $p^2=q^2$ となる。
これを x について解いて

$$\begin{aligned} x^2-2xs+2rs-r^2=0 \\ x^2-2xs+r(2s-r)=0 \\ (x-r)(x-2s+r)=0 \end{aligned}$$

したがって

$$[x=2s-r, x=r]$$

ここで $x=r$ のときは $y=0$ となり、点 P$=(r,0)$ は任意の l について条件を満たす。

$x=2s-r$ のとき

$$\begin{aligned} y &= \pm\sqrt{r^2-x^2} \\ &= \pm\sqrt{r^2-4s^2+4sr-r^2} \\ &= \pm 2\sqrt{s^2+sr} \\ &= \pm 2\sqrt{r^2-l^2+r\sqrt{r^2-l^2}} \end{aligned}$$

$|2\sqrt{r^2-l^2}-r|<r$
$-r<2\sqrt{r^2-l^2}-r<r$
$-r<2\sqrt{r^2-l^2}-r$ かつ $2\sqrt{r^2-l^2}-r<r$
$-r<2\sqrt{r^2-l^2}-r$ より
$0<r^2-l^2$ これは条件より成立する。
$2\sqrt{r^2-l^2}-r<r$ より $-l^2<0$ となりこれも条件より成立する。
したがって、任意の $0<l<r$ において x は存在し、同時に y も存在する。

以上より $r=l$ のとき
$s=0$ となり
x の解は $[r,-r]$ の二つとなり
点 P は (r,0),(-r,0) の 2 点

$l=0$ のとき
$s=r$ となり x は $x=r$ の重解を持つ
点 P は (r,0) の 1 点

$0<l<r$ のとき

$(r, 0)$,
$(2\sqrt{r^2 - l^2} - r, 2\sqrt{r^2 - l^2 + r\sqrt{r^2 - l^2}})$,
$(2\sqrt{r^2 - l^2} - r, -2\sqrt{r^2 - l^2 + r\sqrt{r^2 - l^2}})$
の 3 点