京都大学　1970 年　入学試験　理系数学　問題 5

問題

関数 $F(x) = \displaystyle\int_0^x t \sin^3 t \, dt$ の極大値を求めよ．ただし，$x > 0$ とする．

解答

不定積分は

$$\int t \sin^3 t \, dt = -\frac{\sin(3t)}{36} + \frac{t\cos(3t)}{12} + \frac{3\sin t}{4} - \frac{3t\cos t}{4}$$

となるので

$$\begin{aligned}
F(x) &= -\frac{\sin(3x)}{36} + \frac{x\cos(3x)}{12} + \frac{3\sin x}{4} - \frac{3x\cos x}{4} \\
&\quad -(-\frac{\sin(0)}{36} + \frac{0\cos(3\cdot 0)}{12} + \frac{3\sin 0}{4} - \frac{3\cdot 0\cos 0}{4}) \\
&= -\frac{\sin(3x)}{36} + \frac{x\cos(3x)}{12} + \frac{3\sin x}{4} - \frac{3x\cos x}{4} \\
&\quad -(-\frac{0}{36} + \frac{0}{12} + \frac{0}{4} - \frac{0}{4}) \\
&= -\frac{\sin(3x)}{36} + \frac{x\cos(3x)}{12} + \frac{3\sin x}{4} - \frac{3x\cos x}{4}
\end{aligned}$$

となり、$F(x) = \displaystyle\int x \sin^3 x \, dx$ よって $F'(x) = x\sin^3 x$
$F(x)$ は連続ですべての点で微分可能なので $F'(x) = 0$ の点で極大または極小となる

$x\sin^3 x = 0$ をみると、$x > 0$ より
$F'(x) = 0$ となるのは $\sin^3 x = 0$ のとき
これは、$\sin x = 0$ のときなので $x = n\pi$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ のときに限る。

$$\begin{aligned}
\int n\pi \sin^3 n\pi \, dt &= -\frac{\sin(3n\pi)}{36} + \frac{n\pi\cos(3n\pi)}{12} + \frac{3\sin n\pi}{4} - \frac{3n\pi\cos n\pi}{4} \\
&= \frac{n\pi\cos(3n\pi)}{12} - \frac{3n\pi\cos n\pi}{4} \\
&= \frac{n\pi\cos(3n\pi) - 9n\pi\cos n\pi}{12}
\end{aligned}$$

$$M_n = \frac{n\pi\cos(3n\pi) - 9n\pi\cos n\pi}{12}$$

とおくと
$n = 2k$(n は偶数) のとき $\cos(3n\pi) = \cos n\pi = 1$ なので
$M_n = \frac{-2n\pi}{3} < 0$
$n = 2k-1$(n は奇数) のとき $\cos(3n\pi) = \cos n\pi = -1$
$M_n = \frac{2n\pi}{3} > 0$
以上より n が偶数のときは常に負で、奇数のときは常に正なので
$2k-2 < x < 2k$ の範囲では $F(x)$ は $n = 2k-1$ のとき極大となり極大値 $\frac{2(2k-1)\pi}{3}$ をとる。
これは任意の $k > 0$ について成立するので
$F(x)$ は k を正の整数としたとき、$x = 2k-1$ の点において極大値 $\frac{2(2k-1)\pi}{3}$ をとる。