

京都大学 1984年 入学試験 文系数学 問題1

問題

方程式 $xy = 1$ によって与えられる双曲線を C とし、また次のように、行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ によって定義される

1次変換を f とする、 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

1次変換 f が双曲線 C を C 自身の上へ写すための (a, b, c, d) についての必要十分条件を求めよ。

解答

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおく

$x' = ax + by, y' = cx + dy$ である。

この点 (x', y') が C の上にあるためには

$x'y' = 1$ であることが必要なので

$(ax + by)(cx + dy) = acx^2 + (ad + bc)xy + bdy^2 = 1$ であることが必要。

$xy = 1$ なので $acx^2 + bdy^2 + (ad + bc) = 1$ また $x \neq 0, y \neq 0$ なので

$y = \frac{1}{x}$ を代入すると

$acx^2 + bd\frac{1}{x^2} + (ad + bc) = 1$

両辺に x^2 をかけて

$acx^4 + bd + (ad + bc)x^2 = x^2$

$acx^4 + bd + ((ad + bc) - 1)x^2 = 0$

これが任意の x について成立しなければならないので

$ac = 0, bd = 0, ad + bc = 1$ が成立しなければならない。

$a = 0$ とすると $bc = 1$ である必要があるので $b \neq 0, c \neq 0, c = \frac{1}{b}$ なので $d = 0$

よって $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}$ このとき $x' = by, y' = \frac{x}{b}$ となり

$x'y' = \frac{xby}{b} = xy = 1$

また A の逆行列は $ad - bc = -1$ より

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}$ となり、存在するので任意の点 Q に写る点 P が存在する。

したがって、 f は C を C の上に写す。

$c = 0$ とすると $ad = 1$ である必要があるので $d \neq 0, a \neq 0, d = \frac{1}{a}$ なので $b = 0$

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$ このとき $x' = ax, y' = \frac{y}{a}$ となり

$x'y' = \frac{axy}{a} = xy = 1$

A の逆行列は同様に $ad - bc = 1$ より

$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ となり、存在するので任意の点 Q に写る点 P が存在する。

したがって、 f は C を C の上に写す。

以上より a, b, c, d について

$$a = 0, b \neq 0, c = \frac{1}{b}, d = 0$$

または

$$a \neq 0, b = 0, c = 0, d = \frac{1}{a}$$

が必要十分。

証明終了